NO.

Date Μάθημα 3ο 08/03/2018

Προηγούμενα:

$$Var(T(\underline{x})) \geq \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta} E(T(\underline{x}))\right)^2}{I_x(\theta)} = ΚΦ \quad C\text{-}R$$

$$I_x(\theta) = n \cdot I(\theta) = n \cdot E\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log f(x,\theta)\right)^2$$

Είχαμε δείξει ότι:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} E\,T(x) = Cov\left(T(x), \frac{\partial}{\partial\theta} \log f(\underset{\sim}{x},\theta)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log f(\underset{\sim}{x},\theta) = K(\theta,n)\left[T(\underline{x}) - g(\theta)\right]$$

Μεθοδολογία εύρεσης Α.Ο.Ε.Δ. με ανισότητα C-R

1ο ΒΗΜΑ Εξασφάλιση ότι ισχύουν οι συνθήκες εφαρμογής της

(1) μια από αυτές λέει ότι το π.ο. της $f(x,\theta)$ δεν εξαρτάται από θ

(2) Αν η $f(x,\theta) = c(\theta) \cdot h(x)\, e^{Q(\theta) \cdot T_1(x)}$, $x \in A$

(Το π.ο. ανεξάρτητο του θ)

τότε εξασφαλίζεις ότι ισχύουν οι συνθήκες

NO.

Date

2ο Βήμα

1ος τρόπος:

(i) Μαντεύω έναν αμερόληπτο εκτιμητή της $g(\theta)$
$T(\underline{X})$ τ.ω. $E(T(\underline{X})) = g(\theta)$

(ii) Υπολογίζω την $Var(T(X))$

(iii) Υπολογίζω το ΚΦ C-R $= \dfrac{(g'(\theta))^2}{I_X(\theta)}$

(iv) Αν $Var(T(\underline{X}))$ = κάτω φράγμα (Κ.Φ.)
πέτυχες τον ΑΟΕΔ.

(ΔΗΛ πρέπει να μαντέψω έναν αμερόληπτο που θα τύχει να έχει
Var = ΚΦ C-R → όχι εύκολο.)

2ος τρόπος

Η ισότητα στην ανισότητα C-R επιτυγχάνεται αν-ν

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underline{x},\theta) = k(\theta,n)\left(T(x)-g(\theta)\right)$$

Τότε $T(x)$ ΑΟΕΔ της $g(\theta)$

NO

Date

Παράδειγμα.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $B(1,\theta)$. Άρα $f(x,\theta)=\theta^x(1-\theta)^{1-x}$, $x=0,1$

Να βρείτε, αν είναι εφικτό, ΑΟΕΔ εκτίμηση της θ. με τη μέθοδο C-R.

Λύση

Αρχικά, εξασφαλίζω ότι μπορώ να δουλέψω με την μέθοδο C-R.

$\Downarrow$

Το π.ο. εξαρτάται από το θ;

$$f(x,\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x} = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^x \cdot (1-\theta) =$$

$$= (1-\theta)\cdot e^{\log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^x} = \underbrace{(1-\theta)}_{c(\theta)}\, e^{\overbrace{x}^{T(x)}\,\underbrace{\log\frac{\theta}{1-\theta}}_{Q(\theta)}} \cdot \underbrace{1}_{h(x)}$$

(*)

$x \in A = \{0,1\}$.

(Κάνω αυτήν την διαδικασία για να δω αν μπορώ να εφ. C-R) → ΜΠΟΡΩ

(Τώρα, εξετάζουμε τους τρόπους)

1ος Τρόπος

Έχω:
$B(1,\theta)$
ΑΟΕΔ της θ.
$EX=\theta$ → πληθ. μέση τιμή
Δειγμ. μέση τιμή

(*) Το έφερα στη μορφή:
$f(x,\theta) = c(\theta)\cdot h(x)\cdot e^{Q(\theta)\cdot T(x)}$, $x\in A$
Άρα εξασφαλίζονται οι συνθήκες

NO.

Date

Ψάχνω αμερόληπτο.

$$E\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{\sum E X_i}{n} = \frac{\sum 1\cdot\theta}{n} = \frac{n\theta}{n} = \theta$$ (ΒΡΗΚΑ ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΟ)

$$Var\frac{\sum X_i}{n} = \frac{1}{n^2}\sum Var X_i = \frac{\sum \theta(1-\theta)}{n^2} = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$ (ΒΡΗΚΑ ΤΟ Var ΤΟΥ)

(Θέλω να είμαι τσχερός τώρα)

$$\text{ΚΦ } C\text{-}R = \frac{(g'(\theta))^2}{I_X(\theta)} \overset{g(\theta)=\theta}{=} \frac{1}{I_X(\theta)}$$

Είναι: $\log f(x,\theta) = x\cdot\log\theta + (1-x)\cdot\log(1-\theta)$

και $\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta) = \frac{x}{\theta} - \frac{1-x}{1-\theta} = \frac{x(1-\theta)-(1-x)\cdot\theta}{\theta(1-\theta)} =$

$$= \frac{x - x\theta - \theta + x\cdot\theta}{\theta(1-\theta)} = \frac{x-\theta}{\theta(1-\theta)}$$

και $I(\theta) = E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta)\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow I(\theta) = E\left(\frac{x-\theta}{\theta(1-\theta)}\right)^2 = \frac{E(X-\theta)^2}{\theta^2(1-\theta)^2} = \frac{Var X}{\theta^2(1-\theta)^2} = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

Άρα είναι: $nI(\theta) = \frac{n}{\theta(1-\theta)}$

Επομένως, έτυχε να βγει αυτό που ψάχναμε

Άρα $\frac{\sum X_i}{n}$ ΑΟΕΔ της θ.

ήθελα πρώτα ν.δ.ο ανήκει
στην εκθετ. οικογ. κατανομών

$2^{ος}$ Τρόπος

(εδώ δε χρειάζεται "μαντεψιά")

- $\log f(\underline{x},\theta) = \log \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) =$

$= \log \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} = \log\left[\theta^{\sum x_i}\cdot(1-\theta)^{n-\sum x_i}\right] =$

$= \sum x_i \cdot \log\theta + (n-\sum x_i)\cdot\log(1-\theta)$

- $\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underline{x},\theta) = \frac{\sum x_i}{\theta} - \frac{n-\sum x_i}{1-\theta} =$

$$= \frac{\sum x_i(1-\theta) - (n-\sum x_i)\theta}{\theta(1-\theta)} =$$

$$= \frac{\sum x_i - \cancel{\sum x_i\theta} - n\theta + \cancel{\sum x_i\theta}}{\theta(1-\theta)} =$$

$$= \frac{\sum x_i - n\theta}{\theta(1-\theta)} =$$

$$= \frac{\sum x_i}{\theta(1-\theta)} - \frac{n}{1-\theta} =$$

θέλω να το φέρω
στην μορφή :
$\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underline{x},\theta) = K(\theta,n)\cdot(T(x)-g(\theta))$

$$= \frac{n}{\theta(1-\theta)}\cdot\left\{\frac{\sum x_i}{n} - \theta\right\}$$

μόνο θ,n

εδώ θέλω
μόνο X,n
(εκτιμητής)

εδώ θέλω μόνο θ
(το εκτιμώμενο)

Άρα ο $\frac{\sum x_i}{n}$ αμερόληπτος του θ.

Παρατήρηση

Αν η ισότητα στην C-R. επιτυγχάνεται για μια παραμετρική συνάρτηση $g(\theta)$ τότε με τη μεθοδολογία της C-R μπορώ να προσδιορίσω ΑΟΕΔ εκτιμητές μόνο για γραμμικές συναρτήσεις της $g(\theta)$.
δηλ για συναρτήσεις της μορφής : $a\, g(\theta) + b$
με a, b = σταθερές.
και οι ΑΟΕΔ εκτιμητές είναι: $a\, T(x) + b$.

πχ $$\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underline{x},\theta) = \frac{n}{\theta\cdot(1-\theta)\cdot 7}\left\{\left(\frac{7\sum x_i}{n}+5\right) - (7\theta+5)\right\}$$

Άρα ΑΟΕΔ της $7\theta+5$ ο $\frac{7\sum x_i}{n}+5$

Άσκηση

$X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. $P(\theta)$

$$f(x;\theta) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots$$

ΑΟΕΔ της θ και της $\frac{1}{\theta}$? (Τα $\theta, \frac{1}{\theta}$ δεν συνδέονται γραμμικά)

Λύση.

Θέλω να το φέρω στη μορφή $f(x,\theta) = c(\theta)\cdot h(x)\cdot e^{Q(\theta)\cdot T(x)}$

$$f(x,\theta) = \frac{e^x \cdot e^{-\theta}}{x!} = e^{-\theta}\left(\frac{1}{x!}\right)e^{x\log\theta}$$, $x \in A$ ανεξ/το του θ.

Άρα ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών

2ος τρόπος του 2ου βήματος

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underline{x},\theta) = K(\theta,n)\left[U - g(\theta)\right]$$

NO.

Date

$$f(\underline{x}\,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} = \frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\theta}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

$$\log f(\underline{x}\,\theta) = \Sigma x_i \log\theta - n\theta - \log \Pi x_i!$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} f(\underline{x},\theta) = \frac{\Sigma x_i}{\theta} - n =$$

$$= \frac{n}{\theta a}\left[a\frac{\Sigma x_i}{n} + b - a\theta + b\right]$$

Άρα ο $\frac{\Sigma x_i}{n}$ είναι ΑΟΕΔ της θ.

Με την C-R μπορώ να προσδιορίσω ΑΟΕΔ όλων των γραμμικών συνδιασμών της μορφής : $a\theta + b$.
με a, b σταθερές $(a \neq 0)$
και είναι οι : $a\frac{\Sigma x_i}{n} + b$.

Τα $\theta, \frac{1}{\theta}$ δεν συνδέονται γραμμικά.

Άρα με την C-R δεν μπορώ να βρω αμερόληπτο εκτίμηση της $1/\theta$.

2º Βήμα - 1ος τρόπος (Σκιαγράφηση)

Δειγματική μ.τ. $E\frac{\Sigma x_i}{n} = \theta$

ΑΛΛΑ

$Var\frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{\theta}{n}$

ΠΟΙΟ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ;;;

$K\Phi.\ C\text{-}R \overset{g(\theta)=\theta}{=\!=} \ldots = \frac{\theta}{n}$

π.χ. για θ^2

Άρα δεν θα μπορούσα με την C-R να βρω εκτίμηση π.χ. για το θ^2.
Η C-R βρίσκει μόνο για το θ και για τα γραμμικά του.
Επομένως η C-R δεν βολεύει πάντα.

C-R. $\begin{cases} \text{π.ο.} \\ \text{εκθετική οικογένεια} \\ \text{πράξεις για συγκεκριμένη μορφή} \end{cases}$

Άρα μ γνωστό

<u>Άσκηση</u>

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από την $N(\mu, \theta)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$

$$\Longrightarrow f(x;\theta) = (2\pi\theta)^{-1/2} \cdot e^{-\frac{1}{2\theta}(x-\mu)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

<u>Λύση</u>

$$f(x;\theta) = \underbrace{(2\pi\theta)^{-1/2}}_{c(\theta)} \cdot \underbrace{1}_{h(x)=1} \cdot e^{\overbrace{-\frac{1}{2\theta}}^{Q(\theta)} \underbrace{(x-\mu)^2}_{T(x)}}, \quad x \in A = \mathbb{R}.$$

προσοχή! (γιατί μ: γνωστό)
(εάν ήταν άγνωστο → πράξεις)

Παίρνω την από κοινού:

$$f(\underline{x},\theta) = \prod_{i=1}^{n} (2\pi\theta)^{-1/2} \cdot e^{-\frac{1}{2\theta}(x_i-\mu)^2} =$$

$$= (2\pi\theta)^{-n/2} \cdot e^{-\frac{1}{2\theta}\sum (X_i-\mu)^2}$$

NO.

Date

Προσοχή στις πράξεις !!

$$-\log f(\underline{x},\theta) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\theta) - \frac{1}{2\theta}\Sigma(X_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} f(\underline{x},\theta) = -\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\Sigma(X_i-\mu)^2 =$$

$$= \frac{1}{2\theta^2}\cdot n\left[\frac{\Sigma(X_i-\mu)^2}{n} - \theta\right]$$

$$\left(\frac{1}{2\theta^2}\cdot y = -\frac{n}{2}\frac{1}{\theta} \Rightarrow y = -n\theta\right)$$

Άρα $\frac{\Sigma(X_i-\mu)^2}{n}$ ΑΟΕΔ της θ.

(Με την C-R δεν μπορώ να βρω πάντα αμερόληπτο της θ)

↓

υπάρχουν άλλοι τρόποι

ΕΠΑΡΚΕΙΑ

1ος Ορισμός: Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. από έναν πληθυσμό με σ.π.π. ή σ.π. $f(x;\theta)$. Μια σ.σ. $T(\underline{X})$ λέγεται επαρκής για το θ αν η δεσμευμένη κατανομή του $\underline{X} \mid T=t$ δεν εξαρτάται από το θ, $\forall \theta \in \Theta$ και για όλες τις τιμές t που ορίζει η δεσμευμένη.

Τι σημαίνει πρακτικά αυτό;
Σημαίνει ότι αν μου δώσουν τη τιμή της στατιστικής συνάρτησης T η κατανομή του X παύει να εξαρτάται από το θ.
(δηλ. όλη η πληροφορία περιέχεται στην τιμή της T.)

1ο ερώτημα
Υπάρχει πάντοτε επαρκής σ.σ.;
ΝΑΙ → είναι όλο το δείγμα (έτσι γνωρίζω τα πάντα)
π.χ. $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$
↳ ενώ όμως δεν πάω σε μικρότερο δείγμα από αυτό που έχω
δηλ. υπάρχει πάντοτε μία και σε μερικές περιπτώσεις δεν είναι μοναδική

1η αδυναμία του ορισμού:
"Μαντεύω" ποιο είναι το T.

2η αδυναμία του ορισμού:
Η προϋπόθεση εύρεσης της δεσμευμένης κατανομής

NO.

Date

2^{α} Ορισμός

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από έναν πληθυσμό με σ.π.π ή σ.π. $f(x;\theta)$. Μια σ.σ. $T(\underline{X})$ λέγεται επαρκής για το θ αν-ν η δεσμευμένη κατανομή του $U/T=t$ δεν εξαρτάται από το θ $\forall \theta \in \Theta$ και για όλες τις τιμές t που ορίζει η δεσμευμένη και για κάθε άλλη σ.σ. U

Παραγοντικό Θεώρημα NEYMANN - FISCHER

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από έναν πληθυσμό με σ.π.π ή σ.π. $f(x,\theta)$. Μια σ.σ. $T = T(X_1, \ldots, X_n) = T(\underline{X})$ είναι επαρκής σ.σ. για την παράμετρο θ. αν-ν

$$f(\underline{x},\theta) = g(T(\underline{x},\theta))\, h(\underline{x})$$

Παρατηρήσεις.

① Υπάρχει πάντοτε επαρκής σ.σ. (βλ. πάνω)

② Η διάσταση της επαρκής σ.σ. δεν είναι κατ' ανάγκη ίση με αυτή της παραμέτρου

③ Αν T είναι επαρκής για τη θ τότε T επαρκής για την $\varphi(\theta)$ για κάθε 1-1 μετασχηματισμό φ.

④ Αν T επαρκής για τη θ, τότε $\varphi(T)$ με φ "1-1" επαρκής για τη θ.

NO
Date

Παράδειγμα

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $B(1,\theta)$

$\Rightarrow f(x_i;\theta) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}$, $x_i = 0,1$! Δεν εξαρτάται από το θ $\Downarrow$ προχωράω άνετα

Λύση

Πρέπει να βρω την από κοινού

$$f(\underline{x};\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} \Rightarrow$$

$$f(\underline{x};\theta) = \theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i} =$$

$$= \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\overset{=n\bar{x}}{\Sigma x_i}} (1-\theta)^n =$$

$$= g(\Sigma x_i, \theta) \cdot \underbrace{h(\underline{x})}_{=1} =$$

$$= g(\bar{x}, \theta) \cdot h(\underline{x})$$

(Από παρατηρήσεις)

Άρα: $f(\underline{x},\theta) = g(T(\underline{x}),\theta)\cdot h(\underline{x})$

Άσκηση

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από την $N(\theta,\sigma^2)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, $x_i \in \mathbb{R}$.

$$f(x,\theta) = \prod_{i=1}^{n} (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\theta)^2}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(x_i-\theta)^2} \Rightarrow$$

NO

Date

$$f(\underset{\sim}{x},\theta) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(x_i^2 - 2x_i\theta + \theta^2)}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\Sigma x_i^2 - 2\theta\Sigma x_i + n\theta^2]}$$

$$= \underbrace{(2\pi\sigma^2)^{-n/2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma x_i^2}}_{h(\underset{\sim}{x})} \cdot \underbrace{e^{\frac{\theta}{\sigma^2}\Sigma x_i} \cdot e^{-\frac{n\theta^2}{2\sigma^2}}}_{g(\Sigma x_i,\theta)}$$

<u>Άσκηση</u>

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από την $U(0,\theta)$

σ.π.π. $f(x,\theta) = \dfrac{1}{\theta}$ $\boxed{0 \leq x \leq \theta}$!!!

Το π.ο. εξαρτάται από το θ

<u>Λύση</u>

Παίρνω επάρκεια!

$$f(\underset{\sim}{x},\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x_i < \theta$$

$$\Rightarrow f(\underset{\sim}{x},\theta) = \frac{1}{\theta^n}, \quad \underline{0 < x_i < \theta}$$

(Θέλω να το γράψω $g(T(x),\theta) \cdot h(x)$)

Θέλω να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases} 0 < x_1 < \theta \\ 0 < x_2 < \theta \\ \vdots \\ 0 < x_n < \theta \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ εξασφαλίζεται από τη σχέση:

$$\underbrace{\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}}_{=} < \theta \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x_{(n)} < \theta$$

Άρα: $f(\underset{\sim}{x}, \theta) = \dfrac{1}{\theta^n}$, $x_{(n)} < \theta$

Η "αγκαλιά" του $X_{(n)}$ είναι το θ και το $+\infty$

Είναι: $I_{x\in A} = \begin{cases} 1, & x\in A \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Άρα γράφουμε:

$$f(\underset{\sim}{x}, \theta) = \underbrace{\frac{1}{\theta^n} \cdot I_{(x_{(n)}, +\infty)}(\theta)}$$

$X_{(n)}$ επαρκής σσ. για το θ.

1ο Μπακαλιστικό: ως προς x

Όταν το π.ο.* είναι φραγμένο από πάνω μόνο από το θ τότε να περιμένω η επαρκής σ.σ. να είναι το $X_{(n)}$ (διατεταγμένο)

NO

Date

2º μπακαλίστικο

Όταν το π.ο. είναι φραγμένο μόνο από κάτω ($\theta < X_i$) τότε να περιμένω η εκτιμήτρια σ.σ. να είναι το $\min X_i$ (X_1 διατεταγμένο)

3º μπακαλίστικο

Όταν το π.ο. είναι φραγμένο από πάνω και από κάτω από το θ ($\theta - 1 < X_i < \theta$) τότε να περιμένω η εκτιμήτρια σ.σ. να είναι η $(X_{(1)}, X_{(n)})$